Cryptanalyse

Cours 3 - Cryptanalyse de Chiffrements par Flot

Maxime Bombar

Mardi 17 Septembre 2024

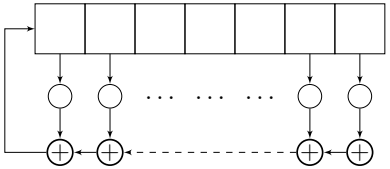
Introduction

Objectif du Jour

- Retours sur la fin du cours de Vendredi
- LFSR Combinés et Filtrés
- Attaques probabilistes
- Exemples de Design

Rappels de la semaine dernière

LFSR

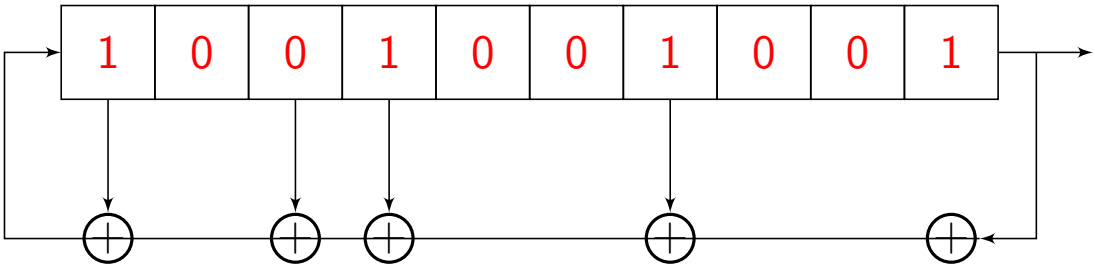


- Une suite est produite par un LFSR ssi elle est récurrente linéaire de la forme $\mathbf{s_{n+\ell} = c_1 s_{n+\ell-1} + \cdots + c_\ell s_0}$.
- Un LFSR est uniquement déterminé par son état à un instant t, et son **polynome de rétroaction** $P(X) = 1 - \sum_{i=1}^{\ell} c_i X^i$.
- La suite est périodique, de période $\leqslant q^{\deg(P)} - 1$, avec égalité si par exemple P est **primitif**.

Complexité linéaire d'une suite

- Le polynôme de rétroaction d'une suite récurrente linéaire n'est pas unique.
- Parmi tous les polynômes de rétroaction, il en existe un de **degré minimal**.
- Le degré $\Lambda(\mathbf{s})$ du polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire $\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé **complexité linéaire de la suite**.
- L'**algorithme de Berlekamp-Massey** permet de retrouver $\Lambda(\mathbf{s})$ et le polynôme minimal en ayant accès à $2\Lambda(\mathbf{s})$ termes, en temps $O(\Lambda(\mathbf{s})^2)$.

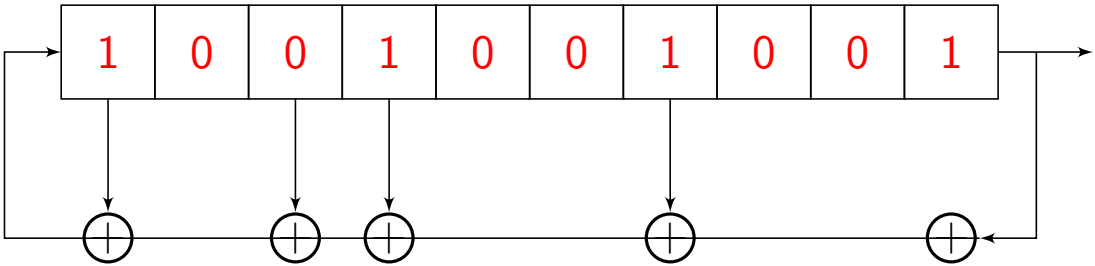
Polynôme de rétroaction



Exercice (2 min)

Quel est le polynôme de rétroaction de la suite binaire définie par ce LFSR ?

Polynôme de rétroaction



Réponse

$$P(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^4 + X^7 + X^{10}$$

Calculons le polynôme minimal : Méthode 1 - Sage direct

- $P(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^7 + X^{10}$
- $s = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$

Rappel : $S(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} s_j X^j = \dfrac{Q(X)}{P(X)}$ avec $\deg(Q) < \deg(P)$.

- On calcule les premiers termes de suite et on construit la série formelle $S(X)$ à un $O(\cdot)$ près.
- On sait que $P(X) \cdot S(X)$ (vu comme série formelle) est en fait un polynôme $Q(X)$
- On simplifie la fraction rationnelle $\dfrac{Q(X)}{P(X)}$

Démonstration

Calculons le polynôme minimal : Méthode 2 - À la main

- $P(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^7 + X^{10}$
- $s = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$

$$
\begin{aligned}
S(X) \cdot P(X) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j X^j \right) \left(\sum_{n=0}^{9} p_j X^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} X^j \left(\sum_{n=0}^{j} p_n \mathbb{1}_{n \leqslant 9} \cdot s_{j-n} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{9} X^j \left(\sum_{n=0}^{j} p_n \cdot s_{j-n} \right)}_{=Q(X)} + \underbrace{\sum_{j=10}^{\infty} X^j \left(\sum_{n=0}^{9} p_n \cdot s_{j-n} \right)}_{=0}
\end{aligned}
$$

Calculons le polynôme minimal : Méthode 2 - À la main

- $P(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^7 + X^{10}$
- $s = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$

- On a donc ici
$$Q(X) = 1 + X + X^7$$
- On cherche (P_0, Q_0) avec $\deg(Q_0) < \deg(P_0) \leqslant \deg(P)$ et tel que
$$R(X) = \frac{Q_0(X)}{P_0(X)} = \frac{Q(X)}{P(X)} = \frac{1 + X + X^7}{1 + X + X^3 + X^4 + X^7 + X^{10}}$$
- On voit que $P(X) = (1 + X + X^7) \cdot (1 + X^3)$ donc $R(X) = \dfrac{1}{1 + X^3}$.
- On en déduit que $Q_0(X) = 1$ et $P_0(X) = 1 + X^3$.

Calculons le polynôme minimal : Méthode 3 - Sage + la preuve

- $P(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^7 + X^{10}$
- $s = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$

Par la preuve, on a l'expression explicite de $Q(X)$:

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{\deg(P)-1} X^j \left(\sum_{n=0}^{j} p_n \cdot s_{j-n} \right)$$

- On définit $Q(X)$ explicitement. On a juste besoin de $(s_j)_{0 \leqslant j \leqslant 9}$ (*i.e.* l'état initial).
- On simplifie $\dfrac{Q(X)}{P(X)}$ avec Sage.

Démonstration

Calculons le polynôme minimal : Méthode 4 - Berlekamp-Massey

Rappel

L'algorithme de Berlekamp-Massey a besoin de $2\Lambda(s)$ termes de la suite, et retourne $\Lambda(s)$ ainsi que le polynôme de rétroaction minimal.

Remarque : Utile si on ne connaît pas un polynôme de rétroaction (*e.g.* cryptanalyse)

- On calcule quelques termes de la suite.
- On lance Berlekamp-Massey.

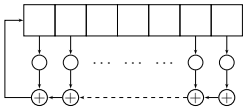
Démonstration

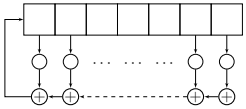
LFSR Combinés et Filtrés

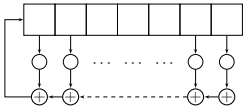
Notre but

Augmenter la complexité linéaire de la suite produite par notre PRG pour rendre Berlekamp-Massey infaisable.

Combinaison de LFSR







$s_t^{(1)}$

$s_t^{(2)}$

$s_t^{(n)}$

f

$\longrightarrow s_t = f(s_t^{(1)}, \ldots, s_t^{(n)})$ où $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$.

Nos hypothèses de travail

Chaque LFSR a un polynôme de rétroaction **primitif** pour avoir de bonnes propriétés statistiques.

Les caractéristiques (longueur, polynômes de rétroaction, ...) sont **publiques**.

Les seules données **secrètes** sont les états initiaux de chaque LFSR (obtenus via la clé secrète, et les différents IV).

Fonction Booléenne

Definition (Définition)

On appelle **fonction booléenne** à n variables une fonction $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$. Elle peut-être décrite par sa **table de vérité** qui donne l'image de tous les éléments de $\mathbb{F}_2^n$.

Exercice

Combien y a-t-il de fonctions booléennes à n variables ?

Support et Poids

Définition

- Le **support** d'une fonction booléenne $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ est

$$Supp(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

- Le **poids** de f est $w(f) \stackrel{\text{def}}{=} |Supp(f)|$.
- f est dite **équilibrée** si $w(f) = 2^{n-1}$. Dans ce cas,

$$|Supp(f)| = |\mathbb{F}_2^n \setminus Supp(f)|.$$

Afin de conserver les propriétés statistiques des LFSR, on demande à ce que la fonction booléenne soit équilibrée.

Forme Normale Algébrique

Soit $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$. Alors, il existe un **unique** polynôme multivarié $\overline{f}$ de la forme

$$\overline{f}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^n} a_{\mathbf{u}} X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}, \qquad \text{avec } a_{\mathbf{u}} \in \mathbb{F}_2^n$$

$$\text{tel que} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n.$$

$\overline{f}$ est appelée la **forme normale** de f, et

$$a_{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{u}} f(x) \text{ où } \mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y} \text{ ssi } x_i \leqslant y_i \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

La preuve se fait par récurrence sur le nombre n de variables.

$\overline{f}$ vit en réalité dans $\mathbb{F}_2[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2 - X_1, \ldots, X_n^2 - X_n)$.

Degré algébrique d'une fonction booléenne

La complexité algébrique d'une fonction booléenne est quantifiée par le **degré** de sa forme normale : si

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^n} a_{\mathbf{u}} X_1^{u_1} \ldots X_n^{u_n}$$

alors

$$\deg(f) = \max\{Hw(u) \mid a_{\mathbf{u}} \neq 0\},$$

où $Hw(\mathbf{u}) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid u_i \neq 0\}|$ est le poids de Hamming de $\mathbf{u}$.

Autrement dit, c'est le nombre maximal d'indéterminées dans un monôme de f.

Exemple : La fonction booléenne de Geffe (1973)

Exemple : Geffe proposa d'utiliser la fonction booléenne définie par la table de vérité suivante pour combiner 3 LFSR :

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	1	0	0	0	1	1	1

On voit alors que

$$Supp(f) = \{(0,0,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

et donc $w(f) = 4$.

Forme Normale Algébrique de la fonction de Geffe

On peut calculer tous les coefficients :

$$
\begin{aligned}
a_{000} &= f(0,0,0) = 0 \\
a_{001} &= f(0,0,0) + f(0,0,1) = 1 && \rightarrow X_3 \\
a_{010} &= f(0,0,0) + f(0,1,0) = 0 \\
a_{011} &= f(0,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(0,1,1) = 1 && \rightarrow X_2X_3 \\
a_{100} &= f(0,0,0) + f(1,0,0) = 0 \\
a_{101} &= f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,0,1) + f(1,0,1) = 0 \\
a_{110} &= f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(1,1,0) = 1 && \rightarrow X_1X_2 \\
a_{111} &= \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{F}_2^3} f(\mathbf{u}) = w(f) \mod 2 = 0
\end{aligned}
$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3 + X_2X_3 + X_1X_2 \quad \text{et donc} \quad \deg(f) = 2.$$

Complexité linéaire de la suite combinée

Rappel

Au temps t, note LFSR combiné produit un bit de la forme $f(s_t^{(1)}, \ldots, s_t^{(n)})$. On cherche à estimer la complexité linéaire de cette nouvelle suite.

Lemme (Rueppel, Staffelbach 1987)

Soient $(s^{(1)})$ et $(s^{(2)})$ deux suites récurrentes linéaires, de polynômes de rétroaction minimaux respectifs $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$. Alors

- $\Lambda(\mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}) \leqslant \Lambda(\mathbf{s}^{(1)}) + \Lambda(\mathbf{s}^{(2)})$, avec égalité ssi $\mathrm{pgcd}(P^{(1)}, P^{(2)}) = 1$.
- $\Lambda(\mathbf{s}^{(1)} \star \mathbf{s}^{(2)}) \leqslant \Lambda(\mathbf{s}^{(1)})\Lambda(\mathbf{s}^{(2)})$, où $\star$ désigne le produit terme à terme.
  Si de plus $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ sont **primitifs**, de degrés **distincts** et supérieurs à 2, alors il y a **égalité**.

Complexité linéaire de la suite combinée

Corollaire

Soient $(\mathbf{s}^{(1)}), \ldots, (\mathbf{s}^{(n)})$ des suites récurrentes linéaires produites par des LFSR minimaux de longueurs respectives $\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(n)}$. Soit $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ une fonction booléenne. Alors, la suite combinée $f(\mathbf{s}^{(1)}, \ldots, \mathbf{s}^{(n)})$ a pour complexité linéaire

$$\Lambda = f(\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(n)})$$

obtenue en évaluant la forme normale algébrique de f vue comme un polynôme dans $\mathbb{Z}$.

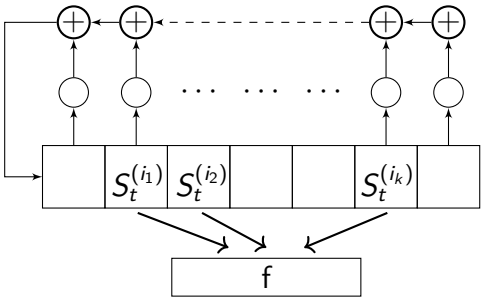
Exemple : Le chiffrement de Geffe (1973)

Il utilise 3 LFSR de longueurs $\ell^{(1)}, \ell^{(2)}$ et $\ell^{(3)}$, deux à deux distinctes, combinés par la fonction booléenne $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_2x_3 + x_1x_2$.
La complexité linéaire combinée est alors $\Lambda = \ell^{(3)} + \ell^{(2)}\ell^{(3)} + \ell^{(1)}\ell^{(2)}$.

Preuve du lemme : cas de la somme

Au tableau si assez de temps.

LFSR filtrés



Revient à combiner k LFSR avec le **même polynôme de rétroaction** mais des états initiaux décalés.

Attention : les résultats précédents sur les complexités linéaires ne s'appliquent pas.

Complexité linéaire d'un LFSR filtré

(Edwin L. Key, 1976)

La complexité linéaire $\Lambda(\mathbf{s})$ d'une suite chiffrante $\mathbf{s}$ produite par un LFSR de longueur ℓ et filtré par une fonction booléenne de **degré algébrique** d vérifie

$$\Lambda(\mathbf{s}) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{\ell}{i}.$$

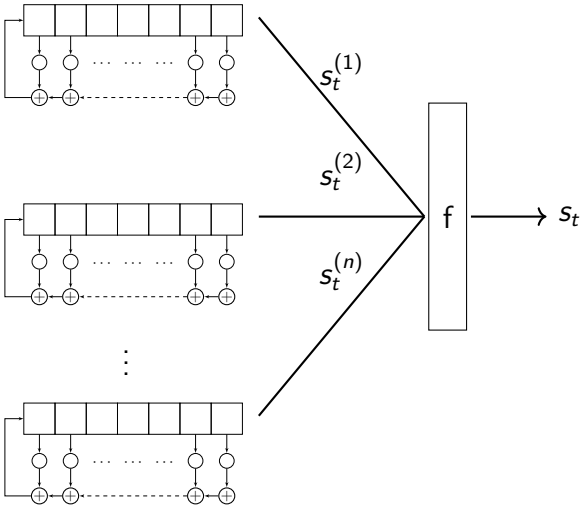
(Rueppel, 1986)

Lorsque ℓ est premier, assez grand, alors $\Lambda(s) \approx \binom{\ell}{d}$ pour la plupart des fonctions booléennes de degré d.

En pratique, c'est souvent le cas.

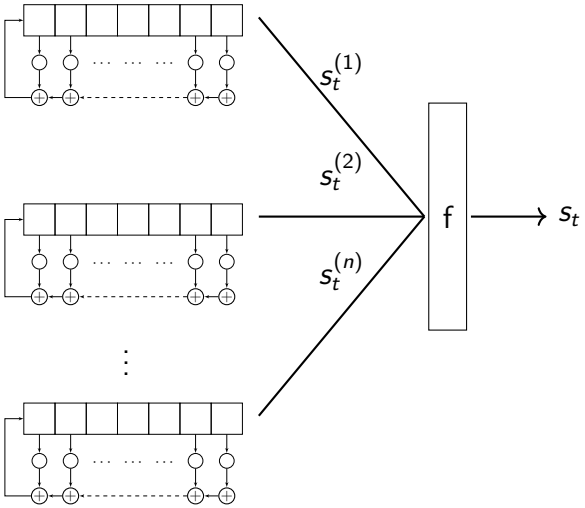
Quelques Cryptanalyses

Attaque par Corrélations



Coût de la recherche exhaustive sur les états internes en fonction des longueurs $\ell_1, \ldots, \ell_n$?

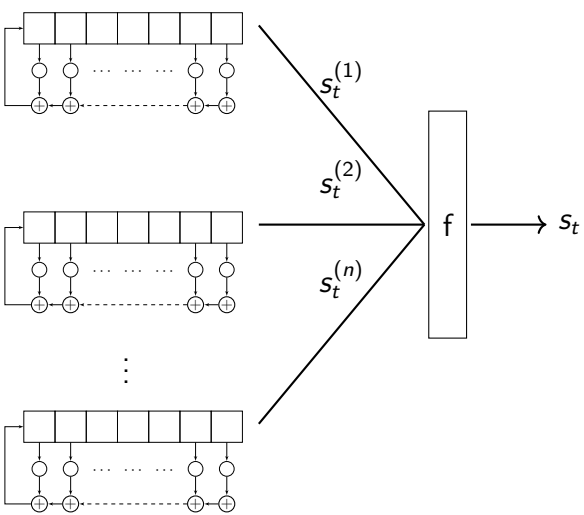
Attaque par Corrélations



Recherche exhaustive

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right)$$

Attaque par Corrélations

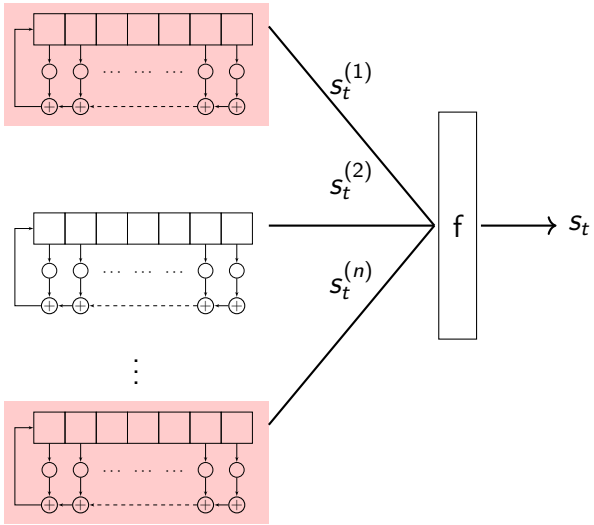


Recherche exhaustive

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right)$$

- Attaque à clairs connus.
- **Idée :** Si f est mal choisie, la suite s_t peut-être **corrélée** à une suite formée par **moins de LFSR**.
- **Principe :** Recherche exhaustive indépendemment sur les sous-LFSR.

Attaque par Corrélations

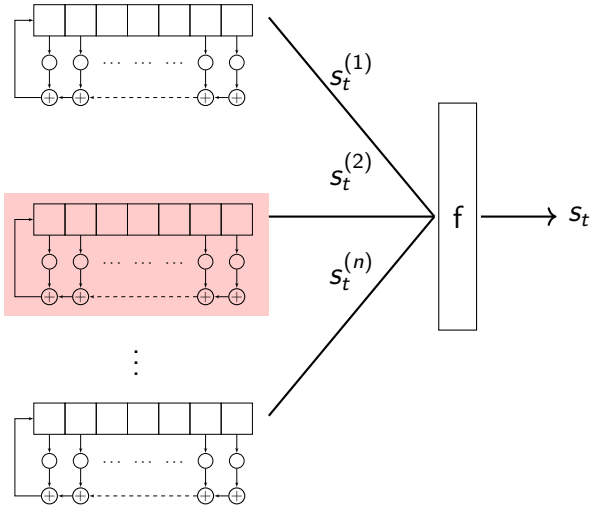


Recherche exhaustive

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right)$$

- Attaque à clairs connus.
- **Idée :** Si f est mal choisie, la suite s_t peut-être **corrélée** à une suite formée par **moins de LFSR**.
- **Principe :** Recherche exhaustive indépendemment sur les sous-LFSR.

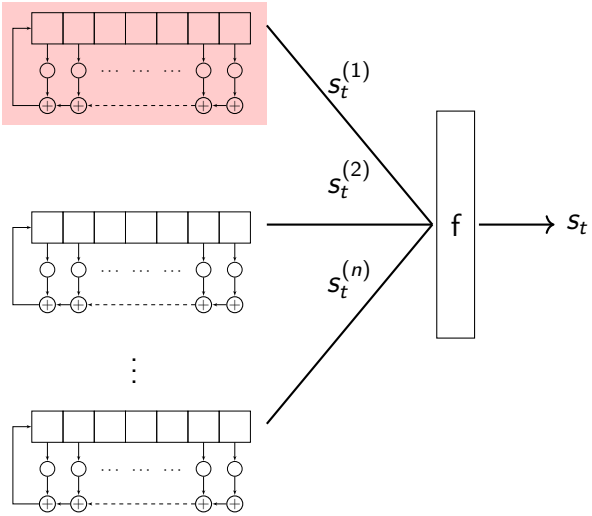
Attaque par Corrélations



$$\text{e.g. } \prod_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right)$$

- Attaque à clairs connus.
- **Idée :** Si f est mal choisie, la suite s_t peut-être **corrélée** à une suite formée par **moins de LFSR**.
- **Principe :** Recherche exhaustive indépendemment sur les sous-LFSR.

Attaque par Corrélations



$$\text{e.g. } \prod_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(2^{\ell_i} - 1\right)$$

- Attaque à clairs connus.
- **Idée :** Si f est mal choisie, la suite s_t peut-être **corrélée** à une suite formée par **moins de LFSR**.
- **Principe :** Recherche exhaustive indépendemment sur les sous-LFSR.

Contre-Mesures

Définition

Une fonction booléenne $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ est **non-corrélée** à l'ordre k si pour toutes variables aléatoires binaires, et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, la variables aléatoire $f(X_1, \ldots, X_n)$ est **indépendante** de n'importe quel $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. Le plus grand tel k est l'**immunité** de f aux corrélations.

Idée : On veut choisir f avec une **forte immunité**, et un **degré algébrique** élevé.

Il y a 2^{2^n} fonctions booléennes à n variables
$\rightarrow$ Les bonnes fonctions booléennes sont difficiles à trouver.

Attaques algébriques

Clairs et chiffrés reliés par des relations algébriques.

Si le système est trop simple, on peut parfois le résoudre (linéarisation, bases de Gröbner...). En pratique, plus efficaces pour les LFSR filtrés.

On aura l'occasion d'en reparler.